

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Mathématiques : applications et interprétation

## Niveau supérieur

### Épreuve 2

2 mai 2024

Zone A matin | Zone B matin | Zone C matin

2 heures

---

#### Instructions destinées aux candidats

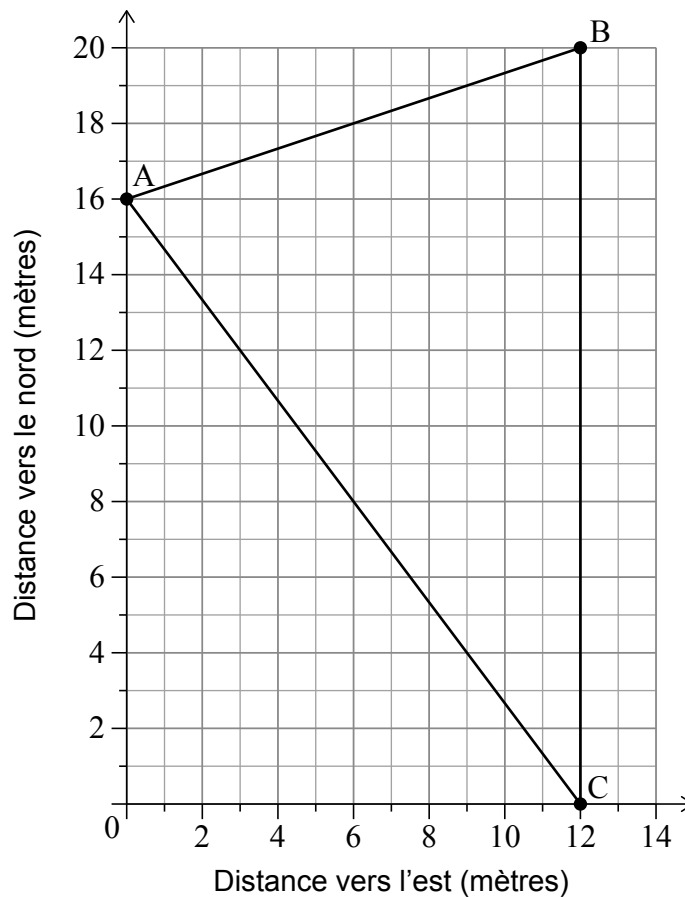
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fautive, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 14]

Mai est dans un parc d'attractions. Un plan d'une partie du parc d'attractions est représenté sur le système d'axes suivant.

Les trois attractions préférées de Mai sont situées en  $A(0 ; 16)$ ,  $B(12 ; 20)$  et  $C(12 ; 0)$ . Toutes les mesures sont en mètres.



- (a) Écrivez la distance entre B et C. [1]
- (b) Calculez la distance entre A et B. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

**(Suite de la question 1)**

Mai se tient devant l'attraction située en B et souhaite se rendre directement à pied à l'attraction située en A.

(c) Calculez le relèvement de A à partir de B. [3]

Une fontaine à eau doit être installée en un point situé à égale distance de chacune des attractions situées en A, B et C.

(d) (i) Écrivez la pente de [AC].

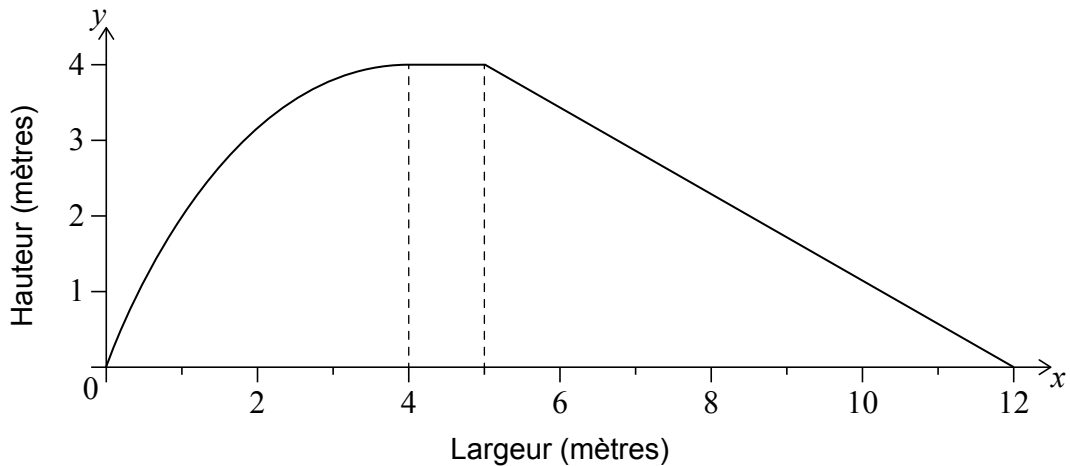
(ii) Écrivez le point milieu de [AC].

(iii) À partir de là, calculez les coordonnées de la fontaine à eau. [8]

Page vierge

2. [Note maximale : 15]

Le diagramme suivant montre un modèle de la vue latérale d'une glissade d'eau. Toutes les longueurs sont mesurées en mètres.



La partie incurvée de la glissade est modélisée par

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x \text{ pour } 0 \leq x \leq 4.$$

Le reste de la glissade est modélisé par

$$g(x) = \begin{cases} 4, & \text{pour } 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{48}{7} - \frac{4x}{7}, & \text{pour } 5 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

- (a) Utilisez la formule des trapèzes avec un intervalle de largeur 1 pour calculer l'aire approximative sous le modèle de la glissade dans l'intervalle  $0 \leq x \leq 4$ . [5]
- (b) Trouvez  $\int \left( -\frac{1}{4}x^2 + 2x \right) dx$ . [3]
- (c) Calculez l'aire exacte sous le modèle entier de la glissade, pour  $0 \leq x \leq 12$ . [4]
- (d) Trouvez le pourcentage d'erreur dans l'aire **totale** sous le modèle entier de la glissade lorsqu'on utilise la valeur approchée de la partie (a). [3]

3. [Note maximale : 22]

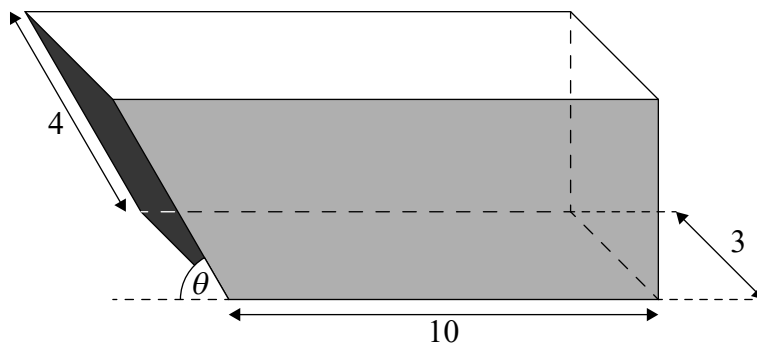
Une benne est un conteneur utilisé pour transporter des déchets hors d'un chantier de construction. Pour des raisons de sécurité, les déchets ne doivent pas dépasser le haut de la benne. Le volume maximal de déchets à transporter est donc égal au volume de la benne.



Une conception particulière de benne peut être modélisée comme un prisme dont la coupe transversale est trapézoïdale. Pour que la benne puisse être transportée, elle doit avoir une base rectangulaire d'une longueur de 10 m et d'une largeur de 3 m. La longueur de l'arête inclinée est fixée à 4 m et fait un angle de  $\theta$  avec l'horizontale.

Le diagramme suivant montre une telle benne.

la figure n'est pas à l'échelle



(Suite de la question à la page suivante)

**(Suite de la question 3)**

- (a) Trouvez le volume de la benne,
- (i) si la longueur de l'arête supérieure de la benne est de 11 m.
  - (ii) si la hauteur de la benne est de 3,2 m.
  - (iii) si  $\theta$  mesure  $\frac{\pi}{3}$ . [9]
- (b) Montrez que le volume,  $V\text{m}^3$ , de la benne est donné par
- $$24 \sin(\theta)(5 + \cos(\theta)).$$
- [2]
- (c) Expliquez, dans le contexte, pourquoi  $\theta \neq 0$ . [1]
- (d) (i) Esquissez la représentation graphique de  $V = 24 \sin(\theta)(5 + \cos(\theta))$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .
- (ii) Trouvez le volume maximal de la benne et la valeur de  $\theta$  correspondant à ce volume maximal. [4]
- (e) Montrez, par dérivation, que le volume maximal survient pour une valeur de  $\theta$  qui satisfait l'équation  $2 \cos^2 \theta + 5 \cos \theta - 1 = 0$ . [6]



4. [Note maximale : 12]

Un inspecteur d'hygiène habite dans la ville A et doit visiter des restaurants dans cinq villes (B–F), avant de retourner à la ville A. L'inspecteur ne doit repasser par aucune des villes. Les distances, en km, entre les six villes sont indiquées dans le tableau.

	A	B	C	D	E	F
A		31	28	26	22	23
B	31		25	20	27	25
C	28	25		19	22	24
D	26	20	19		21	22
E	22	27	22	21		24
F	23	25	24	22	24	

- (a) En commençant par A, utilisez l'algorithme du plus proche voisin pour trouver une borne supérieure pour la longueur du voyage de l'inspecteur. Indiquez l'ordre dans lequel les villes doivent être visitées. [4]
- (b) En effaçant A, utilisez l'algorithme de Prim commençant en B pour trouver une borne inférieure pour la longueur du voyage de l'inspecteur. [5]
- (c) En considérant l'arbre couvrant minimal trouvé dans la partie (b), déterminez si le parcours correspondant à cette borne inférieure est une solution viable. [3]

5. [Note maximale : 16]

Les chauffeurs d'une entreprise de livraison peuvent garer leur camionnette pendant la nuit soit au siège social, soit à leur domicile.

Urvashi est un chauffeur de cette entreprise. Si un jour donné, Urvashi a garé sa camionnette au siège social pendant la nuit, la probabilité qu'elle gare sa camionnette au siège social le jour suivant est de 0,88. Si un jour donné, Urvashi a garé sa camionnette chez elle pendant la nuit, la probabilité qu'elle gare sa camionnette chez elle le jour suivant est de 0,92.

- (a) Écrivez une matrice de transition,  $T$ , qui montre le mouvement de la camionnette d'Urvashi entre le siège social et chez elle. [2]

Lundi **matin**, elle a récupéré sa camionnette au siège social, où cette dernière était garée pendant la nuit.

- (b) Trouvez la probabilité que la camionnette d'Urvashi soit garée chez elle à la fin de la semaine vendredi **soir**. [3]

- (c) Écrivez le polynôme caractéristique de la matrice  $T$ . Donnez votre réponse sous la forme  $\lambda^2 + b\lambda + c$ . [2]

- (d) Calculez les vecteurs propres pour la matrice  $T$ . [4]

- (e) Écrivez des matrices  $P$  et  $D$  telles que  $T = PDP^{-1}$ , où  $D$  est une matrice diagonale. [2]

- (f) À partir de là, trouvez la probabilité à long terme que la camionnette d'Urvashi soit garée chez elle. [3]

Page vierge

6. [Note maximale : 14]

Le  $k^{\text{ième}}$  nombre triangulaire,  $T_k$ , est défini par  $T_k = \sum_{r=1}^k r$ .

- (a) (i) Calculez la valeur du cinquième nombre triangulaire,  $T_5$ .
- (ii) Déterminez la formule pour  $T_k$  sous la forme  $ak^2 + bk$ . [4]
- (b) (i) Trouvez la valeur de  $T_5 + T_4$ .
- (ii) Trouvez l'expression la plus simple pour  $T_k + T_{k-1}$ . [3]

Un sac contient 15 disques rouges et 10 disques bleus, tous identiques sauf pour la couleur. Deux disques sont choisis au hasard et sans remise dans le sac.

- (c) Calculez la probabilité que les deux disques soient de couleurs différentes. [3]

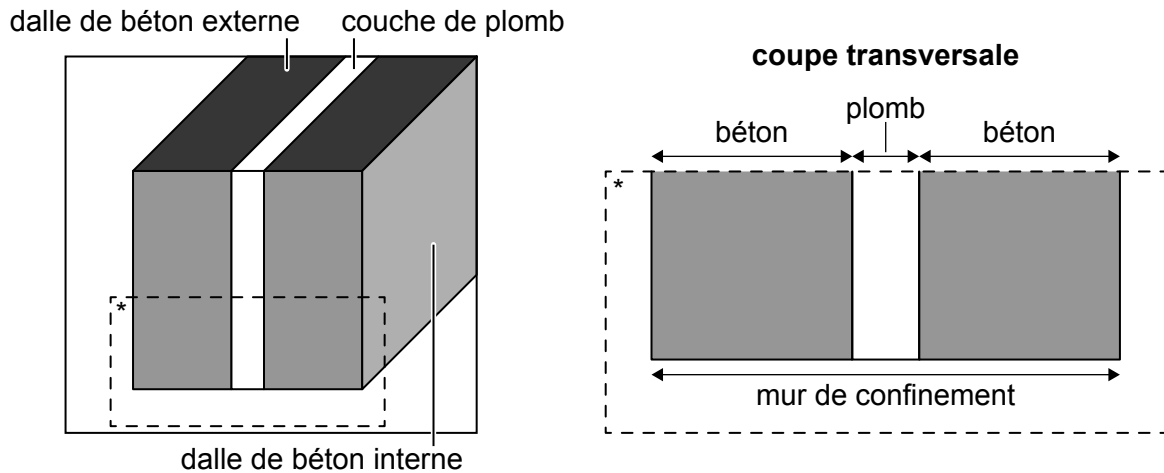
Un sac contient  $T_k$  disques rouges et  $T_{k-1}$  disques bleus, tous identiques sauf pour la couleur. Deux disques sont choisis au hasard et sans remise dans le sac.

- (d) Montrez que la probabilité que les deux disques soient de couleurs différentes est indépendante de  $k$ . [4]

7. [Note maximale : 17]

Les murs de confinement destinés à protéger contre les radiations sont construits à partir de deux dalles de béton parallèles comportant une couche de plomb entre elles, tel que montré dans le diagramme.

la figure n'est pas à l'échelle



La largeur d'une dalle en béton est modélisée par une distribution normale dont la moyenne est de 350 mm et l'écart type est de 10 mm.

- (a) Trouvez la probabilité qu'une dalle de béton choisie au hasard ait une largeur inférieure à 340 mm. [2]
- (b) Trouvez les bornes de l'intervalle, symétriques par rapport à la moyenne, telles que 95 % des dalles aient une largeur qui se situe dans cet intervalle. [3]

Stephen suppose que la couche de plomb est également modélisée par une distribution normale, mais avec une moyenne de 100 mm et un écart type de 5 mm et qu'elle est indépendante de la largeur des dalles.

Soit  $W$  la variable aléatoire qui représente la largeur totale du mur, mesurée en mm.

- (c) (i) Étant donné que les largeurs de deux dalles de béton sont indépendantes, calculez la valeur de Stephen pour la moyenne et l'écart type de  $W$ .
- (ii) À partir de là, trouvez  $P(780 < W < 810)$ . [7]

(Suite de la question à la page suivante)

**(Suite de la question 7)**

On craint que la moyenne et l'écart type du modèle de Stephen pour la couche de plomb soient incorrects. Cependant, son hypothèse selon laquelle le modèle est normal et que la largeur de la couche de plomb est indépendante de la largeur des dalles de béton est toujours valable.

Après enquête, il s'avère que la largeur totale du mur de confinement est normalement distribuée avec une moyenne de 810 mm et un écart type de 16 mm. Le modèle pour la largeur d'une dalle de béton ne change pas.

(d) Utilisez les résultats pour la **somme** de variables aléatoires indépendantes afin de trouver une valeur révisée pour

(i) la largeur moyenne de la couche de plomb.

(ii) l'écart type de la largeur de la couche de plomb. [4]

Sous ce modèle révisé, 80 % des couches de plomb ont une largeur inférieure à  $k$  mm.

(e) Calculez la valeur de  $k$ . [1]

---

**Avertissement :**

Le contenu utilisé dans les évaluations de l'IB est extrait de sources authentiques issues de tierces parties. Les avis qui y sont exprimés appartiennent à leurs auteurs et/ou éditeurs, et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'IB.

**Références :**

3. Andyqwe, s.d. *Dumpster truck* [Image en ligne] Disponible sur Internet : <https://www.gettyimages.co.uk/detail/photo/dumpster-truck-royalty-free-image/157611454> [Référence du 18 avril 2023] Source adaptée.

**Tous les autres textes, graphiques et illustrations : © Organisation du Baccalauréat International 2024**