Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

24 de octubre de 2024

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8824 – 9710

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

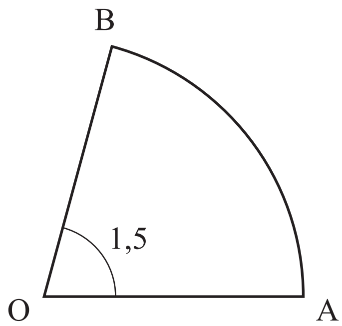
Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

Los puntos A y B pertenecen a una circunferencia con centro en O y radio $r\,\mathrm{cm}$, donde $\mathrm{A\hat{O}B} = 1{,}5$ radianes.

Toda esta información se representa en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



El área del sector circular OAB es $48\,\mathrm{cm}^2$.

(a) Halle el valor de r. [3]

(b) A partir de lo anterior, halle el perímetro del sector circular OAB. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

2. [Puntuación máxima: 6]

Dos sucesos A y B son tales que $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}45$ y $\mathrm{P}(A \cup B) = 0{,}85$.

(a) Halle $\mathrm{P}(A \cap B)$. [3]

(b) Halle $\mathrm{P}(A' \mid B')$. [3]

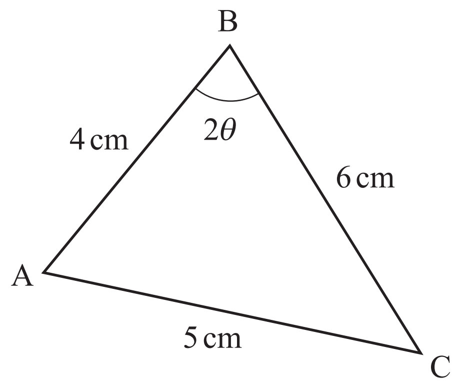
3. [Puntuación máxima: 4]

Pruebe que $(3n+2)^2 - (3n-2)^2$ es múltiplo de 12 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

4. [Puntuación máxima: 6]

La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $\mathrm{AB} = 4\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{BC} = 6\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{AC} = 5\,\mathrm{cm}$ y $\mathrm{A\hat{B}C} = 2\theta$.

la figura no está dibujada a escala



Halle el valor exacto de $\cos\theta$; dé la respuesta en la forma $\dfrac{p\sqrt{2}}{q}$, donde p, $q \in \mathbb{Z}^{+}$.

5. [Puntuación máxima: 6]

Sea una progresión aritmética donde $u_{10} = 16$ y $S_{25} = 100$.

Halle el valor de k para el cual $u_k = 0$.

6. [Puntuación máxima: 5]

(a) Resuelva $2x^2 - 15x + 18 < 0$. [3]

(b) La función f se define así: $f(x) = \sqrt{2x^2 - 15x + 18}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \leq k$.

Halle el mayor valor de k para el cual existe f^{-1}. Justifique su respuesta. [2]

7. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $f(x) = \sec\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, para $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

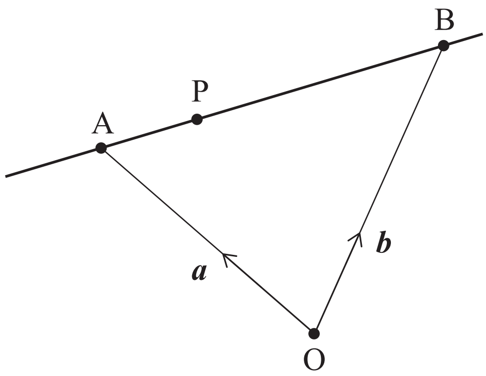
(a) Determine el recorrido de f. [3]

La región delimitada por el gráfico de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ se rota 2π radianes alrededor del eje x.

(b) Halle el volumen de revolución así generado. [4]

8. [Puntuación máxima: 8]

En la siguiente figura se muestran dos puntos A y B, tales que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$.



El punto P pertenece a (AB), de modo tal que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donde $0 < \lambda < 1$.

(a) Muestre que $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-\lambda)\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$. [1]

Se sabe que $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$ y $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{4}$.

(b) Para el caso en que $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ es perpendicular a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, halle el valor de λ. [7]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. [Puntuación máxima: 9]

(a) Pruebe que $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{\operatorname{sen} 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$, donde $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$. [6]

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, resuelva $\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} = \sqrt{3}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

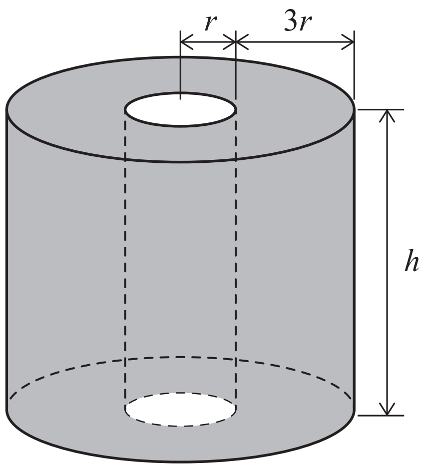
Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 17]

Considere un cilindro de radio $4r$ y altura h. Se extrae del centro un cilindro más pequeño de radio r, para formar así un cilindro hueco. Toda esta información se representa en la siguiente figura.

Todas las longitudes se dan en centímetros.

la figura no está dibujada a escala



El área total de la superficie del cilindro hueco, en cm^2, viene dada por S.

El volumen del cilindro hueco, en cm^3, viene dado por V.

(a) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$. [3]

(b) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Muestre que $V = 360\pi r - 45\pi r^3$. [6]

(c) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$. [2]

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $r = p\sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) Halle el valor de p. [3]

(e) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $q\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $q \in \mathbb{Z}^+$. [3]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 17]

Una curva viene dada por la ecuación $y = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Aplicando la regla de l'Hôpital, o de cualquier otro modo alternativo, muestre que $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) = 1$. [2]

(b) (i) Muestre que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4e^{2x}}{\left(e^{2x} + 1\right)^2}$.

(ii) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \dfrac{dy}{dx}$. [6]

(c) (i) Utilizando la derivación implícita y el resultado obtenido en el apartado (b)(ii), muestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y$.

(ii) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ en función de y. [5]

(d) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de Maclaurin para $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ llegando hasta (e incluyendo) el término en x^3. [4]

No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 20]

Considere la ecuación $z^4 = 16\mathrm{i}$, donde $z \in \mathbb{C}$.

La ecuación tiene cuatro raíces: z_1, z_2, z_3, z_4, donde $z_i = r(\cos\theta_i + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta_i)$, $r > 0$ y $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 < 2\pi$.

(a) Halle z_1, z_2, z_3 y z_4. [6]

Las raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 forman una progresión geométrica.

(b) Halle la razón común de la progresión; exprese su respuesta en forma cartesiana. [3]

Las raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 están representadas en un diagrama de Argand por los puntos A, B, C y D, respectivamente.

(c) Sitúe los puntos A, B, C y D en un diagrama de Argand. [3]

La ecuación $v^4 = a + b\mathrm{i}$, donde $v \in \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tiene por raíces z_1^*, z_2^*, z_3^* y z_4^*.

(d) Determine el valor de a y el valor de b. [3]

El punto medio de $[\mathrm{AB}]$ es A', el punto medio de $[\mathrm{BC}]$ es B', el punto medio de $[\mathrm{CD}]$ es C' y el punto medio de $[\mathrm{DA}]$ es D'.

Considere la ecuación $w^p = 2^q$, donde $w \in \mathbb{C}$ y $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Cuatro de las raíces de $w^p = 2^q$ están representadas por los puntos A', B', C' y D'.

(e) Halle el menor valor posible de p y el correspondiente valor de q. [5]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.