Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

29 de octubre de 2024

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8824 – 9712

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 27]

En esta pregunta le pediremos que investigue varios modelos de la población de truchas que hay en un lago.

La trucha es un tipo de pez. Al comienzo de un año dado, en un lago se calcula que hay 6000 truchas.

La propietaria del lago estima que el número de truchas va aumentando un 10% al año.

Al final de cada año, la propietaria propone extraer del lago 500 truchas para evitar la superpoblación.

Por consiguiente, la relación que existe entre T_n —el número previsto de truchas al comienzo del año n— y T_{n+1}—el número previsto de truchas al comienzo del año $n+1$— viene dada por

$$T_{n+1} = 1{,}1T_n - 500\text{, siendo } T_1 = 6000\,.$$

Por ejemplo, el número previsto de truchas al comienzo del segundo año viene dado por

$$T_2 = 1{,}1T_1 - 500\,.$$

(a) Utilice esta fórmula para verificar que $T_2 = 6100$. [2]

(b) (i) Verifique que $T_3 = 6210$. [1]

(ii) Halle T_4. [2]

También se sabe que $T_n = 6000(1{,}1)^{n-1} - \dfrac{500\left((1{,}1)^{n-1} - 1\right)}{1{,}1 - 1}$.

(c) (i) Muestre que $T_n = 1000\,(1{,}1)^{n-1} + 5000$. [2]

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo, halle T_6. Dé la respuesta redondeando al número entero más cercano. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Tras decidir que la población de truchas aumentará demasiado rápido, la propietaria del lago propone —como plan alternativo— extraer 750 truchas al final de cada año.

La relación que existe entre D_n —el número previsto de truchas al comienzo del año n — y D_{n+1} —el número previsto de truchas al comienzo del año $n+1$ — ahora viene dada por

$$D_{n+1} = 1{,}1D_n - 750\text{, siendo } D_1 = 6000\,.$$

También se sabe que $D_n = -1500\,(1{,}1)^{n-1} + 7500$.

(d) (i) Muestre que $D_{n+1} - D_n = -150\,(1{,}1)^{n-1}$. [3]

(ii) Utilice el resultado del apartado (d)(i) para deducir que el número previsto de truchas al comienzo de un año dado será mayor que el número previsto de truchas al comienzo del año siguiente. [1]

(e) Determine el primer año en el que no quedará ninguna trucha en el lago. [4]

La propietaria del lago se plantea ahora un enfoque más general, en el que se extraen del lago d truchas al final de cada año.

Sea C_n el número previsto de truchas que hay en el lago al comienzo del año n-ésimo, donde

$$C_n = 6000\,(1{,}1)^{n-1} - 10d\big((1{,}1)^{n-1} - 1\big).$$

(f) Halle el valor de d para el cual se cumple que el número previsto de truchas al comienzo de cada año es constante. [3]

Para modelizar el número previsto de truchas, la propietaria del lago ha estado utilizando sucesiones generadas del siguiente modo:

$$u_{n+1} = ru_n - d\text{, donde } d, r \in \mathbb{R}^+ \text{ y } r \neq 1\,.$$

(g) Utilice la inducción matemática para probar que $u_n = u_1 r^{n-1} - \dfrac{d\left(r^{n-1} - 1\right)}{r-1}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. [7]

2. [Puntuación máxima: 28]

Un polinomio se considera palíndromo si la secuencia de sus coeficientes es la misma si se lee de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. En esta pregunta tendrá que investigar algunas propiedades y soluciones de las ecuaciones polinómicas palíndromas.

En los apartados (a) y (b), considere ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + a = 0$, donde $a \neq 0$.

La secuencia de coeficientes $\{a, b, a\}$ no varía al leerla de derecha a izquierda.

La siguiente tabla muestra tres ecuaciones cuadráticas palíndromas y su secuencia de coeficientes.

Ecuación cuadrática palíndroma	**Secuencia de coeficientes**
$2x^2 - 5x + 2 = 0$	$\{2, -5, 2\}$
$x^2 + 4x + 1 = 0$	$\{1, 4, 1\}$
$x^2 + 1 = 0$	$\{1, 0, 1\}$

La ecuación cuadrática $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tiene por raíces 2 y $\frac{1}{2}$.

Estas raíces forman un "par recíproco", ya que una raíz es la recíproca de la otra.

(a) (i) Determine las raíces de $x^2 + 4x + 1 = 0$.

Dé estas raíces en la forma $s \pm \sqrt{t}$, donde $s \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{Z}^+$. [3]

(ii) A partir de lo anterior —o de cualquier otro modo alternativo— muestre que estas raíces forman un par recíproco. [2]

(b) Muestre que las raíces complejas de $x^2 + 1 = 0$ forman un par recíproco. [2]

Sea $p(x) = ax^2 + bx + a$, donde $a \neq 0$.

(c) Verifique que $p(x) = x^2 p\left(\frac{1}{x}\right)$, donde $x \neq 0$. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

En los apartados (d) y (e), puede suponer que es cierto que un polinomio $p(x)$ de grado n es palíndromo si y solo si $p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$.

(d) Utilice $p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$ para mostrar que si $\alpha \neq 0$ es una raíz de $p(x) = 0$, entonces $\frac{1}{\alpha}$ también es una raíz. [2]

Sea $f(x) = p(x)q(x)$, donde p y q son polinomios palíndromos de grado n y m, respectivamente.

(e) Muestre que f es un polinomio palíndromo. [4]

Considere el polinomio palíndromo $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Este polinomio se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(x) = (x^2 + ux + 1)(x^2 + vx + 1), \text{ donde } u, v \in \mathbb{Z} \text{ y } u < v.$$

(f) Planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones apropiado en u y v, determine el valor de u y el valor de v. [6]

(g) A partir de lo anterior, halle todas las raíces exactas complejas y puramente reales de $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$. [3]

Considere la ecuación polinómica palíndroma

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0, \text{ donde } n \text{ es impar.}$$

(h) Muestre que -1 siempre es una raíz de esta ecuación. [4]