

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Nivel Medio

Prueba 2

25 de octubre de 2024

Zona A mañana | **Zona B** mañana | **Zona C** mañana

1 hora 30 minutos

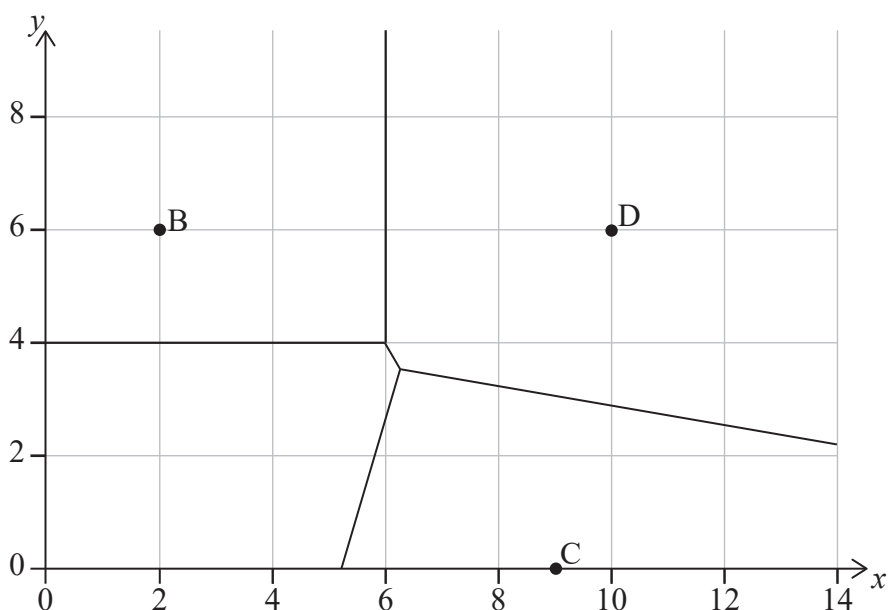
Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NM** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas drubestar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 13]

La siguiente cuadrícula muestra el plano de un restaurante. Hay cuatro estaciones de comida centrados en los puntos A, B, C y D. El diagrama de Voronoi correspondiente a esos cuatro puntos se muestra a continuación. El punto A no aparece en la figura.



Una unidad representa 1 metro.

El punto B se encuentra en (2 , 6).

La ecuación de la mediatriz de [AB] es $y = 4$.

(a) Escriba las coordenadas de A. [1]

Los puntos C y D se localizan, respectivamente, en (9 , 0), y (10 , 6).

(b) Halle:

(i) Las coordenadas del punto medio de [CD].

(ii) La ecuación de la mediatriz de [CD]. Dé la respuesta en la forma $y = mx + c$. [6]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Los clientes del restaurante toman su comida de la estación de comida más próxima.

La siguiente tabla muestra el tiempo de espera promedio (en minutos) en cada una de las estaciones de comida.

Estación de comida	A	B	C	D
Tiempo de espera promedio (minutos)	9	5	10	7

- (c) Utilizando la interpolación del vecino más próximo, halle el tiempo de espera promedio para un cliente que esté en el punto (4 , 6). [1]

La propietaria del restaurante desea determinar si los clientes gastan más dinero durante el fin de semana. Para ello, decide utilizar una prueba t de Student para muestras apareadas a un nivel de significación del 5%.

Para esta prueba, la hipótesis nula es:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

donde μ_1 es la media de la cantidad de dinero que gastan todos los clientes en días laborables, y μ_2 es la media de la cantidad de dinero que gastan todos los clientes los fines de semana.

- (d) Indique la hipótesis alternativa. [1]

La propietaria considera obtener los datos de su muestra en 2 días laborables y 1 fin de semana; para ello, anotarà la cantidad que han gastado los clientes en las 12 primeras órdenes de comida de cada uno de esos días.

- (e) (i) Indique cuál de los siguientes métodos es el que mejor describe el muestreo previsto por la propietaria:

por conveniencia, sistemático o estratificado.

- (ii) Indique una desventaja de esta técnica de muestreo. [2]

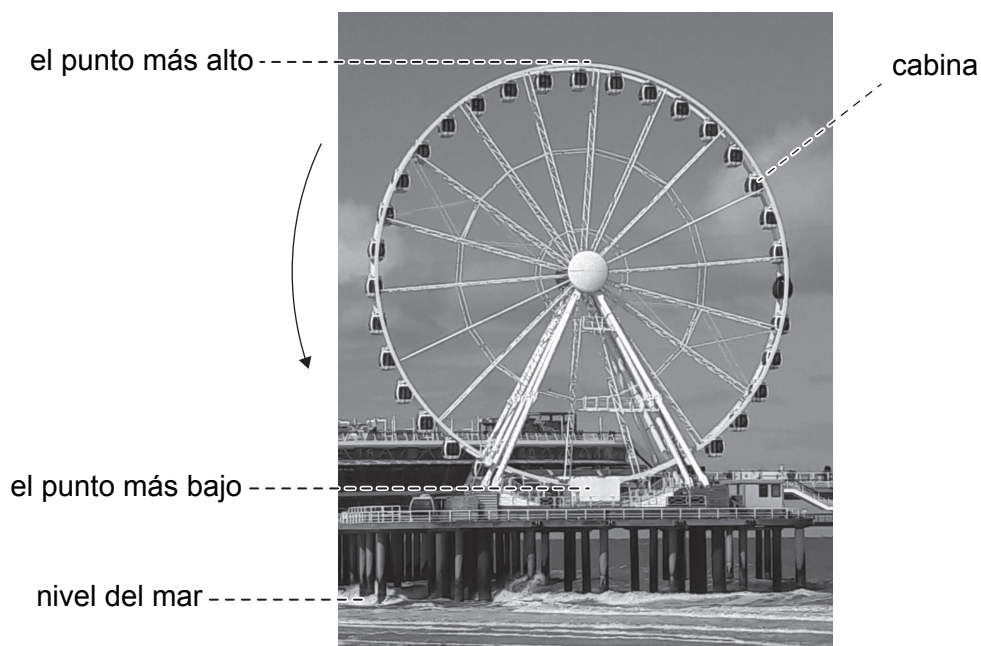
En lugar de ello, la propietaria del restaurante obtiene los datos utilizando un muestreo aleatorio simple.

El valor del parámetro p para los datos de la muestra es 0,0897.

- (f) Indique la conclusión de la prueba. Justifique su respuesta. [2]

2. [Puntuación máxima: 16]

El punto más bajo de la rueda de Scheveningen se encuentra a 8 m sobre el nivel del mar y su punto más alto está a 45 m sobre el nivel del mar.



(a) (i) Muestre que el radio de la rueda es igual 18,5 m.

(ii) Calcule la circunferencia de la rueda.

[2]

En la rueda, hay cabinas equiespaciadas donde se suben los pasajeros.

(b) Halle la distancia que recorre una cabina a lo largo de la circunferencia cuando la rueda rota 10° .

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

La altura sobre el nivel del mar (en metros) de una cabina en particular se puede modelizar mediante la función

$$h(t) = a \sin(bt) + d, \text{ para } a, b > 0,$$

donde t es el tiempo medido en minutos.

La rueda tarda 15 minutos en dar 1 vuelta completa.

- (c) (i) Halle el valor de b .
- (ii) Halle el valor de d .
- (iii) A partir de lo anterior, escriba la ecuación del modelo sinusoidal. [5]
- (d) Utilice el modelo para hallar los valores de t cuando la altura de esta cabina es igual a 33 m sobre el nivel del mar, para $0 \leq t \leq 15$. [3]

Desde que se inauguró la rueda, ha estado funcionando 3000 días y cada día rota sin parar durante 8 horas.

- (e) Calcule el número total de vueltas completas que ha dado la rueda. Dé la respuesta en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y k es un número entero. [3]

3. [Puntuación máxima: 14]

En una encuesta participaron 20 000 expatriados (personas que viven en un país distinto del suyo). Los datos clasificaban a los países por orden según el país que consideraban mejor para los expatriados. En la posición más alta del ranking estaba Suiza.

Estos resultados se compararon con las puntuaciones de felicidad procedentes *Informe mundial sobre felicidad del 2022*. La siguiente tabla muestra este dato de los 10 mejores países para los expatriados.

País	Suiza	Nueva Zelanda	España	Australia	Chipre	Portugal	Irlanda	Emiratos Árabes Unidos	Francia	Países Bajos
Ranking de países para expatriados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Puntuación de felicidad	7,5	7,2	6,5	7,2	6,2	6,0	7,0	6,6	6,7	7,4

(a) Para la **puntuación de felicidad**, halle:

(i) El tercer cuartil

(ii) El rango intercuartil

[4]

(b) Muestre que la puntuación de felicidad de Suiza no es un valor atípico en estos datos.

[3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 3: continuación)

Se elaboró un ranking con las puntuaciones de felicidad para poder calcular el coeficiente de correlación por rangos de Spearman (r_s). Estos rangos se muestran en la siguiente tabla.

País	Suiza	Nueva Zelanda	España	Australia	Chipre	Portugal	Irlanda	Emiratos Árabes Unidos	Francia	Países Bajos
Puntuación de felicidad	7,5	7,2	6,5	7,2	6,2	6,0	7,0	6,6	6,7	7,4
Rango de felicidad	1	a	b	c	9	10	5	7	6	2

(c) Escriba el valor de:

(i) a

(ii) b

(iii) c

[3]

(d) (i) Halle r_s .

(ii) Si la puntuación de felicidad de Francia aumenta hasta 6,9, explique por qué no cambia el valor de r_s .

[3]

José, a partir de estos datos, concluye que los países con una puntuación de felicidad alto probablemente sean los países preferidos por los expatriados.

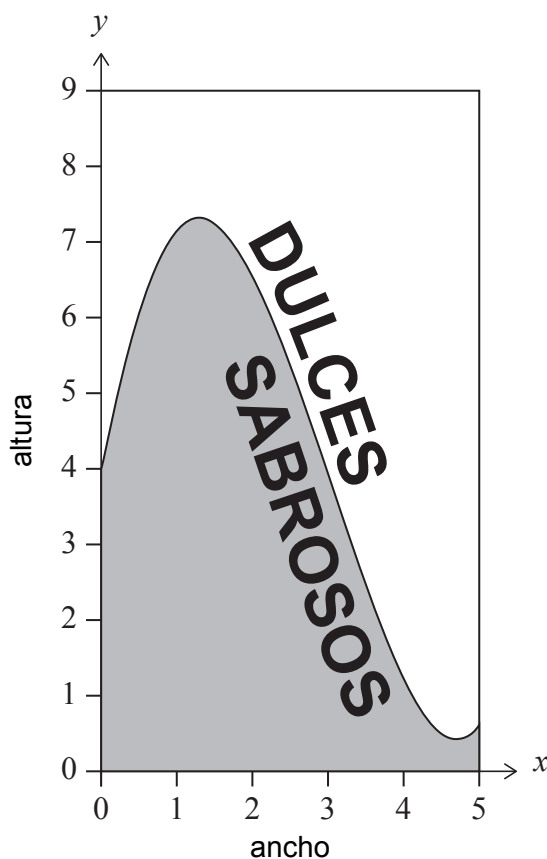
(e) Indique, dando una razón, si la conclusión de José resulta (o no) apropiada.

[1]

4. [Puntuación máxima: 20]

Unos dulces se venden en envases cilíndricos. Se considera diseñar una nueva etiqueta para el envase. La etiqueta tendrá forma de rectángulo de 5 cm de ancho y 9 cm de alto.

El diseño que aparece en la etiqueta es una curva, como se muestra en los siguientes ejes de coordenadas, donde una unidad representa 1 cm en ambos ejes.



Los valores de la tabla representan puntos aproximados de la curva, redondeando a un lugar decimal.

Ancho (x)	0	1	2	3	4	5
Alto (y)	4	7,3	6,7	4,0	1,3	0,7

- (a) Utilice la regla del trapecio con cinco intervalos, y los valores dados en la tabla, para estimar el área sombreada bajo la curva. [3]

La curva empleada en el diseño de la etiqueta se puede modelizar mediante:

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 6x + 4, \text{ para } 0 \leq x \leq 5.$$

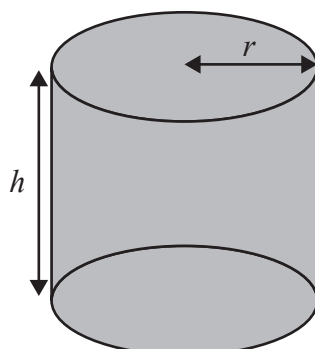
- (b) (i) Escriba la integral que representa el área de la región sombreada.
 (ii) A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 4: continuación)

Los dulces se venden en envases cilíndricos cerrados de radio r y altura h .

la figura no está dibujada a escala



Todo el envase está hecho de un único tipo de material y se supone que el espesor del material es despreciable.

Cada envase tiene un volumen de 600 cm^3 .

- (c) Escriba una ecuación, en función de r y h , que muestre esta información. [1]

La cantidad de material utilizada para cada envase se puede modelizar mediante el área de la superficie externa del envase.

El área de la superficie externa (A) del envase se puede expresar así

$$A = 2\pi r^2 + \frac{k}{r}, \text{ donde } r > 0.$$

- (d) Halle el valor de k . [4]

- (e) (i) Halle $\frac{dA}{dr}$.
 (ii) Sabiendo que existe un valor mínimo de A , halle el valor de r que minimizará el material utilizado. [5]

Los envases se fabrican de modo tal que se minimiza el área de la superficie. La etiqueta rectangular de 5 cm por 9 cm se quiere pegar en la superficie curva del envase.

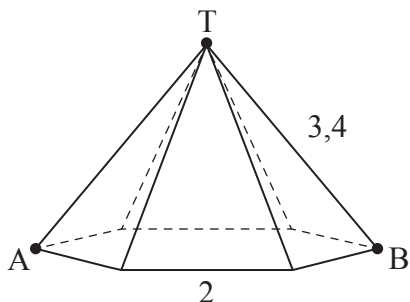
- (f) Muestre que la etiqueta encajará en el envase. [3]

5. [Puntuación máxima: 17]

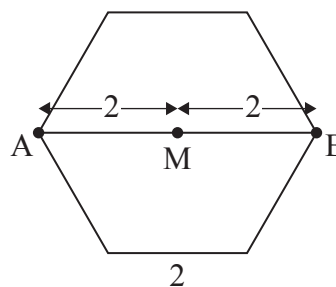
Gaurika está diseñando una tienda de campaña con forma de pirámide recta de base hexagonal regular y centro en M . Cada lado de la base mide 2 m de largo, cada arista inclinada mide 3,4 m de largo y la distancia entre cada vértice de la base y M es igual a 2 m, como se muestra en las figuras.

la figura no está dibujada a escala

Vista 3D de la tienda de campaña



Vista 2D de la base



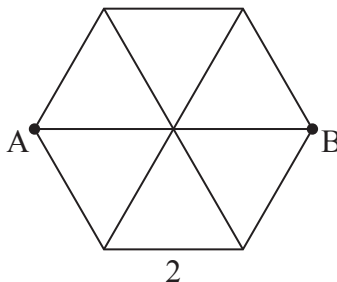
La parte superior de la tienda de campaña (el punto T) se va a sostener mediante un mástil vertical en M .

(a) Halle la longitud de este mástil (MT).

[2]

La base hexagonal se puede dividir en seis triángulos equiláteros.

la figura no está dibujada a escala



(b) Halle:

(i) El área de la base.

(ii) El volumen de la tienda de campaña.

[5]

(c) Halle el valor de $\hat{M\hat{A}T}$.

[2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

Para darle una sujeción adicional, Gaurika decide atar una cuerda de 2,6 m de largo a la tienda de campaña en el punto X , situado en la arista AT .

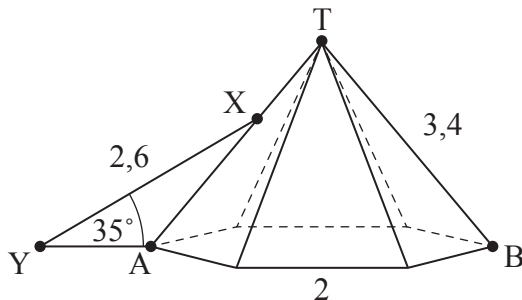
La cuerda se fijará al suelo en el punto Y , tal que:

- La cuerda $[XY]$ es recta.
- Los puntos Y , A y B están en línea recta.
- $\widehat{AYX} = 35^\circ$.

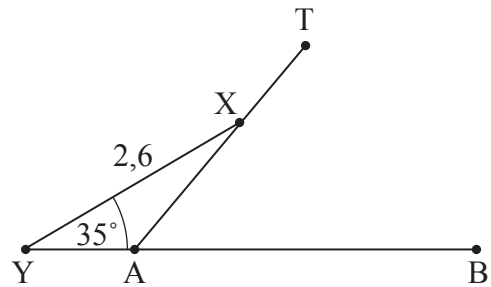
Esto se muestra en las siguientes figuras.

la figura no está dibujada a escala

Vista 3D de la tienda de campaña y de la cuerda



Vista 2D del triángulo AXY



(d) Halle AY .

[4]

A modo de decoración nocturna, Gaurika quiere fijar una tira de luces que vaya del punto A al punto Z , a lo largo de la cuerda $[XY]$.

La tira de luces $[AZ]$ es recta y mide 0,9 m de largo.

(e) Halle los dos valores posibles de YZ .

[4]

Advertencia:

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

Referencias:

3. InterNations. 2022. *Expat Insider 2022*. [en línea] Disponible en: <https://www.internations.org/expat-insider/2022/>. Material original adaptado.

Heliwell, J. F., Huang, H., Wang, S. y Norton, M., 2022. Statistical Appendix for “Happiness, benevolence, and trust during COVID-19 and beyond,” Capítulo 2 del *World Happiness Report 2022*. [pdf en línea] Disponible en: <https://worldhappiness.report/ed/2022/happiness-benevolence-and-trust-during-covid-19-and-beyond/> [Consulta: 13 de noviembre de 2023]. Material original adaptado.

Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2024