

© International Baccalaureate Organization 2024

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2024

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2024

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Nivel Superior

Prueba 3

29 de octubre de 2024

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

1 hora

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 24]

En esta pregunta tendrá que utilizar la teoría de grafos y las matrices de transición para resolver problemas referidos a las visitas de una gerente a cinco fábricas.

Audrey es la gerente de control de calidad de una empresa manufacturera que posee cinco fábricas: A, B, C, D y E.

Está planificando una ruta que le permita visitar cada fábrica una vez, empezando y acabando en su casa (H).

Ha determinado la distancia (en kilómetros) que hay entre cada ubicación, tal y como se muestra en la tabla.

	A	B	C	D	E	H
A		100	150	70	50	40
B	100		80	140	130	85
C	150	80		90	120	160
D	70	140	90		60	100
E	50	130	120	60		70
H	40	85	160	100	70	

Audrey quiere hallar un límite superior y un límite inferior para la mínima distancia total que recorre en su ruta.

(a) Empezando en H, utilice el algoritmo del vecino más próximo para hallar un límite superior. [3]

Para hallar un límite inferior, Audrey utiliza el algoritmo del vértice borrado, borrando el vértice H.

(b) (i) Utilice el algoritmo de Prim, empezando en E, para hallar el peso del árbol generador minimal correspondiente a A, B, C, D y E. Debe indicar claramente el orden en el que el algoritmo va seleccionando las aristas. [3]

(ii) A partir de lo anterior, halle un límite inferior. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Tras su visita inicial a todas las fábricas, Audrey decide ahora que visitará una fábrica cada día. Decide qué fábrica visitar conforme a la siguiente matriz de transición T .

$$\begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 & A & B & C & D & E \\
 \begin{array}{c}
 A \\
 B \\
 C \\
 D \\
 E
 \end{array}
 & \left(\begin{array}{ccccc}
 0 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0,1 \\
 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \\
 0 & 0,2 & 0,2 & p & 0,2 \\
 0,7 & 0,25 & q & r & 0 \\
 0,3 & 0,25 & 0,2 & 0,2 & 0,3
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Después de haber visitado la fábrica D, existe una probabilidad de 0,4 de que Audrey visite la fábrica C a continuación.

(c) Escriba el valor de:

- (i) p [1]
- (ii) q [1]
- (iii) r [1]

(d) Audrey visita en primer lugar la fábrica A.

- (i) Escriba la matriz de estado inicial (\mathcal{S}_0). [1]
- (ii) Halle la probabilidad de que la quinta fábrica que Audrey visite sea la C. [2]
- (iii) Halle la probabilidad de que la quinta fábrica que Audrey visite sea la misma a la segunda fábrica que ha visitado. [5]

(e) A lo largo de un intervalo de tiempo prolongado:

- (i) Halle qué proporción de las visitas de Audrey serán a la fábrica A. [2]
- (ii) Halle la distancia esperada que recorre Audrey al día, sabiendo que siempre va directamente desde su casa a una fábrica y luego vuelve a casa. [3]

2. [Puntuación máxima: 31]

En esta pregunta tendrá que considerar primero un modelo estadístico para el número de peces capturados en un lago y luego considerar una ecuación diferencial para modelizar el crecimiento de los peces en el lago.

Althea le encanta pescar en un lago que hay cerca de su casa. Cada día suele pescar durante 4 horas y va anotando la longitud de cada pez antes de devolverlo al lago.

Althea decide realizar una prueba χ^2 de determinación de la bondad del ajuste, a un nivel de significación del 5%, para determinar si el número de peces capturados se puede modelizar mediante una distribución de Poisson.

Utiliza sus registros de los últimos 50 días para elaborar esta tabla.

Número de peces capturados al día	0	1	2	3	4	5	>5
Frecuencia	2	7	12	11	10	8	0

- (a) Calcule la media del número de peces capturados al día. [2]
- (b) A partir de lo anterior, calcule el número esperado de días —durante un período de 50 días— que Althea no capturaría ningún pez, según el modelo de Poisson. [3]

Althea calcula las frecuencias esperadas y las registra en esta tabla.

Número de peces capturados al día	≤ 1	2	3	4	≥ 5
Frecuencia esperada	10,9	11,6	11,2	8,05	8,25

- (c) Explique por qué ha combinado Althea las columnas correspondientes a 0 y a 1. [1]
- (d) Para esta prueba χ^2 de determinación de la bondad del ajuste:
- (i) Escriba una hipótesis nula adecuada. [1]
 - (ii) Escriba el número de grados de libertad. [1]
 - (iii) Halle el valor del parámetro p . [3]
 - (iv) Escriba la conclusión y justifique su respuesta. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Se construye una fábrica al borde del lago y a Althea le preocupa que la contaminación pueda afectar a la longitud de los peces. Basándose en sus registros —de antes de que la fábrica se construyera—, la longitud de los peces se podría modelizar mediante una distribución normal con una media de 50 cm.

Una vez que la fábrica se ha construido, Althea toma una muestra aleatoria compuesta por 15 peces y calcula que $\bar{x} = 48,6$ cm y $s_{n-1} = 2,56$ cm.

Althea decide comprobar si existen suficientes pruebas de la disminución de la media de las longitudes de la población. Las hipótesis para su contraste son $H_0: \mu = 50$ y $H_1: \mu < 50$.

- (e) Realice la prueba, a un nivel de significación del 5%, para demostrar que hay evidencias de una disminución de la media de la longitud en la población. [3]

Althea decide ahora considerar la longitud de un pez individual en el lago a medida que crece. Investiga el modelo de crecimiento de von Bertalanffy, que afirma que

$$\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L),$$

donde:

- L es la longitud del pez (en centímetros) en el instante t (en meses transcurridos desde su nacimiento);
- $L_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} L$, es la longitud a la que se acerca el pez a medida que va creciendo;
- k es una constante.

(f) Justificando su respuesta:

- (i) Indique si k es positiva, es negativa o podría ser cualquiera de las dos. [2]
- (ii) Indique el valor de $\frac{dL}{dt}$ cuando $t \rightarrow \infty$. [2]
- (iii) Indique un parámetro del modelo que podría haberse visto afectado por la contaminación de la fábrica en el lago. [2]

En el instante $t = 0$ un pez tiene una longitud L_0 cm.

- (g) Dibuje aproximadamente el gráfico de $\frac{dL}{dt}$ en función de t . En su dibujo, tiene que rotular las coordenadas de cualquier intercepto de los ejes y escribir la ecuación de cualquier asíntota. [3]

- (h) Resuelva la ecuación diferencial $\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L)$, utilizando la condición inicial. Escriba la respuesta en la forma $L = f(t)$. [6]